

# Optimierungsmodell – Probabilistische Optimierung der Straßenunterhaltsmaßnahmen mittels Markov-Ketten und Monte-Carlo-Simulation

A. Fastrich, G. Girmscheid

**Zusammenfassung** Die mathematische Optimierung des Straßenunterhalts im Rahmen eines umfassenden Erhaltungsmanagementmodells ermöglicht eine effiziente Maßnahmenplanung zur Sicherung des gewünschten Funktionalitätsniveaus mit minimalen Kosten für alle Stakeholder. Im Rahmen eines Forschungsprojekts in Kooperation mit dem Schweizerischen Bundesamt für Straßen (ASTRA) wurde am Institut für Bau- und Infrastrukturmanagement der ETH Zürich ein holistisches Modell für die Entwicklung und Optimierung von Erhaltungsstrategien und konkreter Erhaltungsvarianten für Straßennetze entwickelt. Das Teilmodell zur dynamischen Optimierung der Maßnahmenplanung (LC-Erhaltungsoptimierungsmodell) wurde in einer vorherigen Veröffentlichung für eine deterministische Anwendung dargestellt. Aufbauend auf diesen Grundlagen wird hier ein probabilistisches Verfahren zur Simulation der Erhaltungsoptimierung auf der Basis einer Kombination von Markov-Ketten und Monte-Carlo Simulation entwickelt. Die Kombination der beiden Verfahren ermöglicht es, sämtliche unsicherheitsbehaftete Parameter des Erhaltungsmanagements in die Simulation einzubeziehen und so eine umfassende probabilistische Auswertung möglicher optimaler Lösungen zu erhalten.

## Optimization Model – Probabilistic Optimization of Street Maintenance Works using Markov Chains and Monte Carlo Simulation

**Abstract** The mathematical optimization of street maintenance as one element of a comprehensive maintenance management model enables measures for assuring the required level of functionality to be planned efficiently and at minimal cost for all stakeholders. The Institute for Construction and Infrastructure Management at ETH Zurich joined forces with the Swiss Federal Roads Authority (ASTRA) on a research project to develop a holistic model for designing and optimizing street maintenance strategies, and developing specific maintenance variants for street networks. The sub-

model for dynamic optimization of the measure planning process (LC maintenance optimization model) for deterministic application has already been presented in a previous publication. Building on this base, a probabilistic method for simulating maintenance optimization based on a combination of Markov chains and Monte Carlo simulation is now being developed. The combination of the two methods allows all of the parameters involved in maintenance management that are surrounded by uncertainty to be incorporated in the simulation in order to obtain a comprehensive probabilistic evaluation of the possible optimum solutions.

## 1 Einleitung

Die hohen und weiterhin steigenden Belastungen der öffentlichen Haushalte durch den Unterhalt bestehender Infrastrukturen (v. a. Straßen) machen es erforderlich, durch eine lebenszyklusorientierte Optimierung des Straßenunterhalts im Rahmen eines holistischen Erhaltungsmanagementmodells eine Minimierung der Kosten zu erreichen. Da die öffentliche Infrastruktur nicht zum Selbstzweck der Betreiber, sondern immer zur Erzielung eines volkswirtschaftlichen Nutzens erstellt und aufrechterhalten wird, sind in eine Optimierung des Erhaltungsmanagements immer auch die Kosten für die Nutzer und die Allgemeinheit einzubeziehen.

In einer vorherigen Veröffentlichung [1] wurde das prinzipielle Vorgehen bei der Optimierung des Straßenunterhalts mit Hilfe des LC-Erhaltungsoptimierungsmodells beschrieben. In diesem Modell wurde ein deterministisches Verfahren zur Minimierung der Stakeholderkosten des Straßenunterhalts auf der Basis des Dynamischen Programmierens entwickelt. Die vorliegende Veröffentlichung baut auf diesen Grundlagen auf und beschreibt eine Erweiterung des Verfahrens zu einer probabilistischen Simulation der Optimierung, in der die Unsicherheiten bezüglich der Ausprägungen und der Entwicklung der relevanten Eingangsparameter berücksichtigt werden können. Die probabilistische Simulation erfolgt mit Hilfe einer Kombination von Markov-Ketten zur Abbildung der Straßenzustandsentwicklung und einer Monte-Carlo-Simulation zur Abbildung der übrigen Parameter der Lebenszykluskosten des Straßenunterhalts.

Das vorgestellte probabilistische LC-Erhaltungsoptimierungsmodell ist Teil des am Institut für Bau- und Infrastrukturmanagement (ehemals Institut für Bauplanung und Baubetrieb) der ETH Zürich entwickelten holistischen LC-Erhaltungsmanagementmodells [2] zur Entwicklung, Bewertung und Optimierung von Erhaltungsstrategien und darauf aufbauenden Erhaltungsvarianten im Straßenunterhalt. Das LC-Erhaltungsmanagementmodell setzt sich aus drei Teilmodellen zusammen, die jeweils bereits in vorherigen Veröffentlichungen beschrieben wurden (**Bild 1**):

### Prof. Dr.-Ing. Gerhard Girmscheid

M.ASCE, John O. Bickel Award 2004 und 2005  
Professor für Bauprozess- und Bauunternehmensmanagement  
Vorsteher Institut für Bau- und Infrastrukturmanagement  
ETH Zürich, CH-8093 Zürich  
girmscheid@ibi.baug.ethz.ch  
Tel. (+41) 44 633 37 87, Fax (+41) 44 633 14 52

### Dipl.-Ing. Andreas Fastrich

Wissenschaftlicher Mitarbeiter und Doktorand  
Institut für Bau- und Infrastrukturmanagement  
ETH Zürich, CH-8093 Zürich  
andreas.fastrich@ibi.baug.ethz.ch

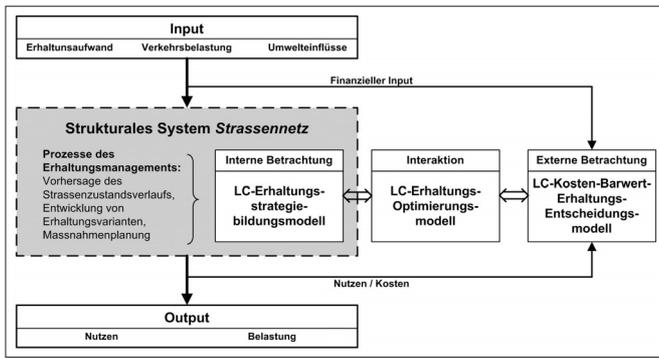


Bild 1. Einordnung des LC-Erhaltungsoptimierungsmodell in die Systemlandschaft und die bereits entwickelten Strategieentwicklungs- und Entscheidungsmodelle [2]

Fig. 1. Classification of the LC maintenance optimization model in the system landscape and the strategy development and decision-making models that have already been developed [2]

- LC-Erhaltungsstrategiebildungsmodell zur Entwicklung individueller Erhaltungsstrategien und operativen Erhaltungsvarianten innerhalb einer Strategie [2], [3]
- LC-Kosten-Barwert-Entscheidungsmodell zur Bewertung von Erhaltungsvarianten auf der Basis einer Kosten-Barwert-Betrachtung aller Stakeholderkosten [2], [4]
- LC-Erhaltungsoptimierungsmodell zur Optimierung des Erhaltungsmanagements [1], [2]

Das LC-Erhaltungsoptimierungsmodell setzt sich aus der deterministischen Variante und der probabilistischen Variante zusammen. Die deterministische Variante mit der ausführlichen Beschreibung des Dynamischen Programmierens zur Lösung eines dynamischen Entscheidungsproblems wurde in der vorangegangenen Veröffentlichung „Optimierungsmodell – Deterministische, lebenszyklusorientierte, dynamische Optimierung der Straßenunterhaltsmaßnahmen“ [1] beschrieben. Im Folgenden wird die auf denselben Grundlagen aufbauende probabilistische Simulation der Erhaltungsoptimierung beschrieben.

## 2 Stand der Forschung

Der Stand der Forschung zu dem Gebiet des Erhaltungsmanagements und der Erhaltungsoptimierung wurde in dem zuvor veröffentlichten Artikel „Optimierungsmodell – Deterministische, lebenszyklusorientierte, dynamische Optimierung der Straßenunterhaltsmaßnahmen“ [1] ausführlich dargestellt. An dieser Stelle wird auf diese Veröffentlichung verwiesen.

## 3 Optimierungsmodell

Die Optimierung des Straßenunterhalts wird im LC-Erhaltungsoptimierungsmodell [2] in Form eines dynamischen Entscheidungsproblems betrachtet. In einem rekursiven Entscheidungsprozess über regelmäßige Zeitschritte soll dabei eine optimale Gesamtlösung gefunden werden. Als Grundlage für die Anwendung eines Optimierungsverfahrens wird zunächst ein dynamisches Entscheidungsmodell [1] für den betrachteten Fall definiert.

Das dynamische Entscheidungsmodell setzt sich aus den folgenden Komponenten zusammen, die im Folgenden detailliert betrachtet werden:

- Zustandsvektor
- Entscheidungsvektor
- Störvektor

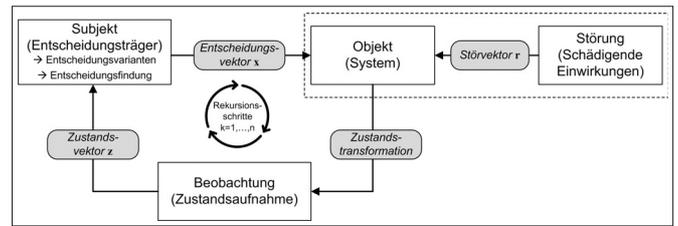


Bild 2. Grundmodell eines dynamischen Entscheidungsmodells [1] (in Anlehnung an Schneeweiss [5])

Fig. 2. Basic dynamic decision-making model [1] (based on Schneeweiss [5])

- Zustandstransformationsgleichung
- Zielfunktion

Das allgemeine Grundmodell eines dynamischen Entscheidungsmodells ist in Bild 2 dargestellt. In einem rekursiven Ablauf trifft der Entscheidungsträger in jedem Schritt eine Entscheidung in welcher Form auf das betrachtete System eingewirkt werden soll. Diese Entscheidung basiert auf der Beobachtung des aktuellen Zustands des Systems und der schädigenden Einwirkung durch äußere Einflüsse. Die Entscheidung in einem Rekursionsschritt  $k$  beeinflusst die weitere Zustandsentwicklung und damit den Zustand  $z$  und die Entscheidungsfindung  $x$  in den folgenden Rekursionsschritten  $k + 1, k + 2, \dots, n$ . Diese Rekursionsschleife wird in regelmäßigen Zeitabschnitten  $[t_k; t_{k+1}]$  der Länge  $t^* = t_{k+1} - t_k$  durchlaufen und so eine Entscheidungsabfolge über den gesamten Betrachtungszeitraum definiert [1].

Für eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Komponenten des Entscheidungsmodell, sowie der rekursiven Entscheidungsfindung wird wiederum auf die vorangegangene Veröffentlichung „Optimierungsmodell – Deterministische, lebenszyklusorientierte, dynamische Optimierung der Straßenunterhaltsmaßnahmen“ [1] verwiesen.

### 3.1 Dynamisches Programmieren

Das Dynamische Programmieren stellt eine mathematische Optimierungsmethode dar, mit der dynamische Entscheidungsprobleme effizient und zuverlässig bearbeitet werden können. Ziel ist es, über die Summe der Einzelentscheidungen in jedem Rekursionsschritt, zu einer insgesamt optimalen Gesamtlösung zu kommen. Dazu wird in jedem Rekursionsschritt der jeweils optimale Pfad zu den einzelnen möglichen Zustandsausprägungen gesucht. Am Ende der Rekursion werden die möglichen Pfade zu einem gemeinsamen Endzustand zusammengeführt (Systemabgrenzung) und damit der insgesamt optimale Pfad bestimmt. Die Rekursion kann vorwärts (vom Anfangszeitpunkt zum Endzeitpunkt) oder rückwärts (vom Endzeitpunkt zum Anfangszeitpunkt) erfolgen.

Mathematisch lässt sich das Verfahren wie folgt beschreiben:

Dynamisches Programmieren durch Vorwärtsrekursion:

Initialisierung:  $J_0(Ix_0) := 0$

Rekursion:

$$J_k(Ix_k) := \min_{x_k \in X_k(Ix_k)} KBW(Ix_k, x_k) + J_{k+1} \left( f_i(Ix_k, x_k) \Big|_{i=0}^{k-1} \right) \quad (1)$$

mit  $T = n \cdot t^*$  und  $t^* = t_{k+1} - t_k$

Dynamisches Programmieren durch Rückwärtsrekursion:

Initialisierung:  $J_{n+1}(Ix_{n+1}) := 0$

Rekursion:

$$J_k(Ix_k) := \min_{x_k \in X_k(Ix_k)} KBW(Ix_k, x_k) + J_{k+1} \left( f_i(Ix_k, x_k) \Big|_{i=n}^{k+1} \right) \quad (2)$$

mit  $T = n \cdot t^*$  und  $t^* = t_{k+1} - t_k$

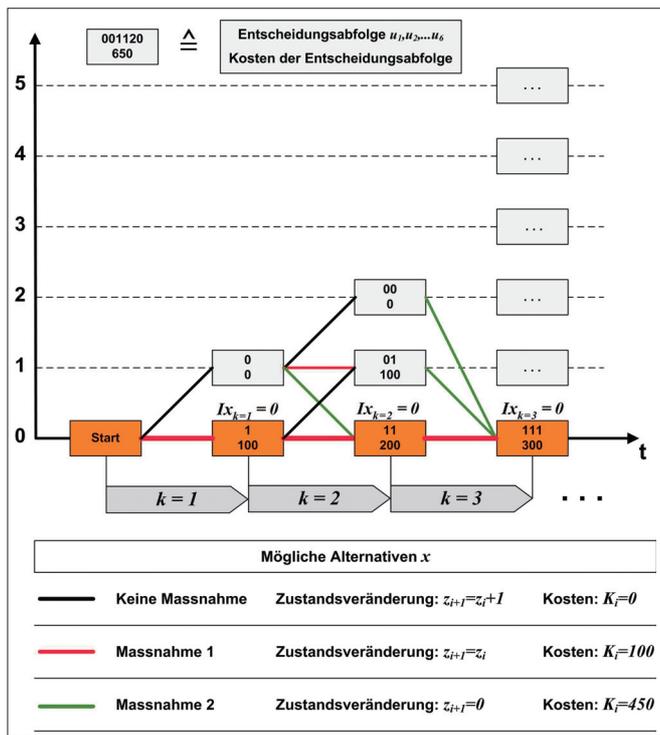


Bild 3. Beispiel zur Optimierung durch Dynamisches Programmieren über drei Entscheidungsschritte

Fig. 3. Example for using dynamic programming to achieve optimization over three decision-making steps

mit:  $J_k(Ix_k)$  = Zielfunktion der Optimierung in Abhängigkeit von der Ausprägung des Straßenzustands  
 $KBW(Ix_k, x_k)$  = Kosten-Barwert im Rekursionsschritt in Abhängigkeit von der Ausprägung des Straßenzustands und dem Entscheidungsvektor  
 $f_i(Ix_i, x_i)$  = Funktion der Kosten-Barwerte der vorangegangenen Rekursionsschritte

Bild 3 zeigt ein Beispiel für die dynamische Optimierung des Straßenunterhalts über drei Entscheidungsschritte. Beispielhaft werden die möglichen Entscheidungsfolgen zur Erreichung des Zielzustands  $Ix_{k=5} = 0$  untersucht. Die Entscheidung im Schritt  $k = 3$  baut auf den Ergebnissen des vorherigen Entscheidungsschritts  $k = 2$  auf. Von den Zustandsausprägungen  $Ix_{k=2} = 1$  sowie  $Ix_{k=2} = 2$  aus kann der Zielzustand durch die Maßnahme 2 erreicht werden, von der Zustandsausprägung  $Ix_{k=2} = 0$  aus mit der Maßnahme 1. Aus der Summe der Kosten zur Erreichung der jeweiligen Zustandsausprägungen im vorherigen Entscheidungsschritt  $k = 2$  sowie den Kosten der im Schritt  $k = 3$  gewählten Maßnahme wird die Alternative, die zu den geringsten Gesamtkosten führt, gewählt. Die optimale Entscheidung im Schritt  $k = 3$  stellt die Wahl der Maßnahme 1 von der Zustandsausprägung  $Ix_{k=2} = 0$  aus dar. Daraus ergibt sich die Maßnahmenabfolge (1,1,1) als optimaler Pfad zum Zielzustand mit den Kosten  $K(Ix_{k=5} = 0) = 300$ . Alle anderen Maßnahmenpfade zum Zielzustand  $Ix_{k=5} = 0$  führen zu höheren Kosten, z.B. der Maßnahmenpfad (0,0,2) kostet  $K(Ix_{k=5} = 0) = 450$  der Maßnahmenpfad (0,1,2) kostet  $K(Ix_{k=5} = 0) = 550$ . Sämtliche alternativen Pfade zum Zielzustand  $Ix_{k=5} = 0$  bzw. zu den Zwischenzuständen  $Ix_{k=2} = 0$  und  $Ix_{k=1} = 0$  können im weiteren Verlauf der Optimierung vernachlässigt werden. Ein alternativer Pfad zum Zielzustand oder einem Zwischenzustand, der sich im jeweiligen

Entscheidungsschritt als nicht optimal erwiesen hat, kann auch im weiteren Verlauf der Optimierung nicht optimal werden (es existiert jeweils mindestens ein günstigerer Pfad zur jeweiligen Zustandsausprägung).

Analog zum beschriebenen Vorgehen werden die optimalen Pfade zu allen möglichen Zustandsausprägungen der folgenden Entscheidungsschritte  $k = 4, 5, \dots, n$  ermittelt.

Für eine detailliertere Beschreibung des Dynamischen Programmierens wird auf die vorangegangene Veröffentlichung „Optimierungsmodell – Deterministische, lebenszyklusorientierte, dynamische Optimierung der Straßenunterhaltsmaßnahmen“ [1] verwiesen.

### 3.2 Probabilistische Simulation der Optimierung

Im einfachsten Fall erfolgt die Optimierung des Straßenunterhalts im Rahmen einer deterministischen Betrachtung auf der Basis fest vorgegebener Eingangsparameter [1]. In der Realität unterliegen die meisten Parameter des Erhaltungsmanagements jedoch einer gewissen Unsicherheit bezüglich ihrer Ausprägung und ihrer zukünftigen Entwicklung. In einer deterministischen Betrachtung werden lediglich die Erwartungswerte der Parameterausprägungen berücksichtigt, die mögliche Streubreite und damit die Unsicherheit bezüglich der genauen Ausprägung wird nicht berücksichtigt. Eine realitätsnähere Betrachtung und damit für den Entscheidungsträger wertvollere Betrachtung des Erhaltungsmanagements erhält man in einer probabilistischen Simulation des Straßenunterhalts. Wie die vorgelegten Teilmodelle (LC-Erhaltungsstrategiebildungsmodell [3] und LC-Kosten-Barwert-Entscheidungsmodell [4]) wird daher auch das LC-Erhaltungsoptimierungsmodell um eine probabilistische Entscheidungssimulation erweitert. Die probabilistische Simulation erfolgt auf Basis einer Kombination der Simulation des Straßenzustandsverlaufs mit Markov-Ketten und einer Monte-Carlo-Simulation [6], [7] der Kostenparameter.

Mit Hilfe einer probabilistischen Simulation lassen sich die Unsicherheiten bezüglich der Eingangsparameter komplexer Modelle simulieren, die auf Grund ihrer Komplexität in einer geschlossenen mathematischen Wahrscheinlichkeitsberechnung nicht abbildbar sind. Die Grundidee der probabilistischen Simulation besteht darin, die Streubreite und die Verteilung der möglichen Ergebnisse einer Berechnung durch die Untersuchung einer großen Anzahl von zufallsbasierten Szenarien zu bestimmen. In jedem Szenario werden die Eingangsparameter der Berechnung zufallsbasiert, aber entsprechend einer zuvor festgelegten Verteilungsfunktion bzw. der Übergangswahrscheinlichkeiten einer Markov-Kette, festgelegt. Die Summe der so erzielten Einzelergebnisse spiegelt die Verteilung der möglichen Ergebnisse der Berechnung unter Berücksichtigung der Unsicherheiten wieder.

Die probabilistische Simulation erfolgt in drei Schritten:

- Definition des mathematischen Modells zur Ermittlung der Zielgrößen der Szenarien
- Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Eingangsparameter in Form von Dichte- und Verteilungsfunktionen (Monte-Carlo-Simulation) bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten (Markov-Ketten)
- Simulation der Ergebnisse

Für den ersten Schritt, also die Definition des mathematischen Modells, kann das im LC-Erhaltungsoptimierungsmodell entwickelte Entscheidungsmodell [1] herangezogen werden.

Die Abbildung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Eingangsparameter wird im Folgenden für die Monte-Carlo Simulation und die Markov-Ketten gesondert betrachtet.

Die Simulation erfolgt darauf aufbauend über eine große Anzahl (ca. 10'000) von Szenarien  $v$ , die jeweils eine mögliche Kombination von Parameterausprägungen enthalten. Die Gesamtheit der simulierten Szenarien stellt die mögliche Bandbreite der optimalen Lösungen dar. Die dynamische Optimierung erfolgt in jedem dieser Szenarien analog zum zuvor beschriebenen deterministischen Vorgehen, jedoch werden die einzelnen Parameter der Optimierung in jedem Szenario mit Hilfe von Zufallszahlen  $Z_i$ , entsprechend der angenommenen Dichte- und Verteilungsfunktionen bzw. entsprechend der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrizen, neu bestimmt [6], [7], [8].

Die Simulation läuft in jedem Rekursionsschritt der Optimierung wie folgt ab:

- Zustandsvektor

In jedem Rekursionsschritt eines Szenarios wird mit einer fixen Zustandsausprägung gearbeitet, die Unsicherheiten betreffen jeweils nur die Änderungen dieses Zustands

- Entscheidungsvektor

Bei der Entscheidungsfindung sind in der Simulation zwei Varianten möglich:

- A priori Berücksichtigung der Unsicherheiten:

Entscheidungsfindung mit Kenntnis der tatsächlichen Parameterausprägungen (Größe der Zustandsänderung durch eine Erhaltungsmaßnahme, Kosten der Erhaltungsmaßnahme), die Entscheidung wird auf Basis der simulierten Parameterausprägungen getroffen

- A posteriori Berücksichtigung der Unsicherheiten:

Entscheidungsfindung ohne Kenntnis der tatsächlichen Parameterausprägungen auf der Basis von Erwartungswerten, die tatsächliche Ausprägung der Parameter hat dann keinen Einfluss auf die Entscheidung

Je nach betrachtetem Parameter kann eine der beiden Varianten sinnvoller sein. Die Auswahl muss für die einzelnen Parameter danach erfolgen, inwieweit der Entscheidungsträger im Entscheidungszeitpunkt Informationen über die voraussichtliche Ausprägung eines Parameters hat und dies in der Entscheidungsfindung berücksichtigen kann, oder nicht.

- Störvektor

Die im Störvektor abgebildete Zustandsverschlechterung wird auf Basis der Übergangswahrscheinlichkeiten der entsprechenden Markov-Kette in jedem Rekursionsschritt festgelegt.

- Zustandstransformationsgleichung

In der Zustandstransformationsgleichung wird der Straßenzustand des vorherigen Entscheidungsschritts unter Berücksichtigung der probabilistischen Zustandsverschlechterung im Störvektor und der probabilistischen Zustandsverbesserung aus dem Entscheidungsvektor in den Folgezustand überführt. Beide Zustandsänderungen werden mit Hilfe von Markov-Ketten bestimmt.

- Zielfunktion

In der Zielfunktion werden die mit einer Monte-Carlo Simulation bestimmten probabilistischen Kostenanteile zu einer Gesamtbewertung zusammengeführt.

Im Folgenden wird die probabilistische Betrachtung des Zustandsverlaufs und der Auswirkung der Erhaltungsmaßnahmen auf Basis von Markov-Ketten sowie die Abbildung der Kostenparameter in Form einer Monte-Carlo-Simula-

tion beschrieben. Beide Simulationsvarianten können unabhängig voneinander in das oben beschriebene Vorgehen zur Simulation der dynamischen Optimierung eingebunden werden.

### 3.2.1 Markov-Ketten

Eine Markov-Kette bildet einen zufallsbasierten Prozess der Zustandsänderung in einem diskreten Zustandsraum in einzelnen diskreten Zeitschritten ab. Sie beruht auf der Definition der Wahrscheinlichkeiten eines Zustandswechsels vom Ausgangszustand zu allen möglichen Folgezuständen. In jedem Zeitschritt wird entsprechend der Übergangswahrscheinlichkeiten eine zufallsbasierte Auswahl der Zustandsänderung ermittelt. Damit eignen sich Markov-Ketten ideal für die diskrete, probabilistische Abbildung des Straßenzustandsverlaufs im Rahmen einer dynamischen Optimierung.

In einer Markov-Kette kann die zukünftige Zustandsentwicklung in Abhängigkeit des aktuellen Zustands, sowie der vorhergegangenen Zustandsentwicklung abgebildet werden. Eine Markov-Kette  $n$ -ter Ordnung beschreibt den Fall, dass der zukünftige Zustand  $Ix_{k+1}$  von den  $n$  letzten Zustandsausprägungen abhängt. Für die Wahrscheinlichkeit, dass im Entscheidungsschritt  $k + 1$  der Zustand  $Ix_{k+1} = \alpha_{k+1}$  erreicht wird, gilt dann:

$$P(Ix_{k+1} = \alpha_{k+1} | Ix_k = \alpha_k, Ix_{k-1} = \alpha_{k-1}, \dots, Ix_{k-n+1} = \alpha_{k-n+1})$$

mit:  $Ix_k$  = Zustandindex  $Ix$  im Entscheidungsschritt  $k$

$\alpha_k$  = Ausprägung des Zustandindex  $Ix$  im Entscheidungsschritt  $k$

Eine Markov-Kette erster Ordnung beschreibt den Fall, dass der zukünftige Zustand  $Ix_{k+1}$  nur vom aktuellen Zustand abhängt ( $n = 1$ ). Dies stellt den häufigsten Anwendungsfall von Markov-Ketten dar, der auch für die Abbildung des Straßenzustandsverlaufs herangezogen wird. Die Eigenschaft, dass nur der aktuelle Zustand Einfluss hat auf die zukünftigen Zustände, bezeichnet man als Markov-Eigenschaft. Damit vereinfacht sich die Markov-Kette zu:

$$P(Ix_{k+1} = \alpha_{k+1} | Ix_k = \alpha_k)$$

### Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix

Für den Fall einer Markov-Kette erster Ordnung lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten von den verschiedenen möglichen Zustandsausprägungen  $Ix_k = \alpha_k$  im Entscheidungsschritt  $k$  zu den verschiedenen möglichen Zustandsausprägungen  $Ix_{k+1} = \alpha_{k+1}$  im Entscheidungsschritt  $k + 1$  in Form einer Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix darstellen. Bei  $n$  möglichen Zustandsausprägungen ergibt sich eine  $n \times n$  Matrix. Für die Abbildung des Straßenzustands  $Ix$  ergibt sich für den einfachen Fall, dass nur ganzzahlige Werte  $Ix$  zulässig sind ( $\alpha_k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ ) die  $6 \times 6$  Matrix  $P^{Ix}$  (Matrix 1):

Jeder Eintrag der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix gibt die Wahrscheinlichkeit  $p_{ij}^{Ix}$  an, dass sich der Straßenzustand in einem Entscheidungsschritt vom Ausgangszustand  $i$  zum Zielzustand  $j$  verändert.

Bei einer feineren Unterteilung des Zustandsverlaufs (z. B. in 1/10 Schritte) ergibt sich eine entsprechend größere Matrix und damit eine genauere Abbildung des Zustandsverlaufs.

**Matrix 1. allgemeine Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix**  
 Matrix 1. General transition probability matrix

$$\mathbf{P}^{Ix} = (p_{ij}^{Ix}) = \begin{matrix} & Ix & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} P_{00}^{Ix} & P_{01}^{Ix} & P_{02}^{Ix} & P_{03}^{Ix} & P_{04}^{Ix} & P_{05}^{Ix} \\ P_{10}^{Ix} & P_{11}^{Ix} & P_{12}^{Ix} & P_{13}^{Ix} & P_{14}^{Ix} & P_{15}^{Ix} \\ P_{20}^{Ix} & P_{21}^{Ix} & P_{22}^{Ix} & P_{23}^{Ix} & P_{24}^{Ix} & P_{25}^{Ix} \\ P_{30}^{Ix} & P_{31}^{Ix} & P_{32}^{Ix} & P_{33}^{Ix} & P_{34}^{Ix} & P_{35}^{Ix} \\ P_{40}^{Ix} & P_{41}^{Ix} & P_{42}^{Ix} & P_{43}^{Ix} & P_{44}^{Ix} & P_{45}^{Ix} \\ P_{50}^{Ix} & P_{51}^{Ix} & P_{52}^{Ix} & P_{53}^{Ix} & P_{45}^{Ix} & P_{55}^{Ix} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

mit:  $\mathbf{P}^{Ix}$  = Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix für den Zustandsindex  $Ix$

$p_{ij}^{Ix}$  = Übergangswahrscheinlichkeit im Zustandsindex  $Ix$  für den Übergang des Zustands von der Ausprägung  $i$  zur Ausprägung  $j$

$Ix \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  = Zustandsgröße

### 3.2.2 Abbildung des Straßenzustandsverlaufs mit Hilfe von Markov-Ketten

Die prospektive Prognose des Straßenzustandsverlaufs erfolgt aus retrospektiven, in der Vergangenheit aufgenommenen Zustandsdaten. Aus den über viele Jahre an Straßen verschiedenen Alters aufgenommenen Zustandsdaten können erwartete Verlaufsfunktionen der Zustandsentwicklung gewonnen werden. Die Streuung der Messwerte gibt außerdem eine mögliche Streubreite des Zustandsverlaufs vor. Aus den Zustandsverlaufsfunktionen zusammen mit der Dichtefunktion der Streubreite können die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrizen für eine Abbildung des Zustandsverlaufs in Markov-Ketten abgeleitet werden.

Der Zustandsverlauf wird in Abhängigkeit von den folgenden Parametern betrachtet, nach denen folglich auch die Übergangswahrscheinlichkeiten differenziert werden müssen:

- Verhaltensklasse  $V$  zur Berücksichtigung des substantiellen Aufbaus der Straße
- Verkehrslastklasse  $VBel$  zur Berücksichtigung der Verkehrsbelastung
- Höhenlage  $H$  zur Berücksichtigung der Umwelteinflüsse

#### Berücksichtigung des substantiellen Aufbaus der Straße

Als Variable zur Berücksichtigung des strukturellen Aufbaus der Straße und der sich daraus ergebenden Auswirkungen auf die Zustandsentwicklung wird die Verhaltensklasse  $V$  eingeführt [3], [9]. Die Verhaltensklasse bildet im Intervall zwischen  $V = 0$  (Struktur optimal) und  $V = 4$  (Struktur mangelhaft) den strukturellen Aufbau der Straße ab. Umfangreiche Erhaltungsmaßnahmen können zu einer Verbesserung des strukturellen Aufbaus führen, während ein langfristiger Unterhalt mit nur oberflächlichen Maßnahmen zu einer Verschlechterung der Struktur führt. Dies wird in einer Änderung der Verhaltensklasse abgebildet, was wiederum zu einer geänderten Zustandsentwicklung führt (andere Zustandsverlaufskurve und damit andere Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix der Markov-Kette). Über lange Betrachtungszeiträume ist nicht nur die Oberfläche einer Straße, sondern auch der strukturelle Aufbau der Straße einer stetigen Verschlechterung unterworfen [3]. Diese Zustandsverschlechterung verläuft zwar lang-

samer als die oberflächliche Schädigung der Straße, führt aber dennoch dazu, dass auch eine ursprünglich gut aufgebaute Straße über die Jahre strukturell geschädigt wird. Daher wird auch die Entwicklung Verhaltensklasse in einer Markov-Kette abgebildet, die die langsame Verschlechterung des strukturellen Aufbaus der Straße abbildet. Durch entsprechende Erhaltungsmaßnahmen kann die Verhaltensklasse verbessert werden.

#### Berücksichtigung der Verkehrsbelastung

Die Verkehrsbelastung wird in der Schweizer Norm [10] in Abhängigkeit der äquivalenten Verkehrslast in sechs Verkehrslastklassen eingeteilt. Für jede für die betrachtete Straße mögliche Verkehrslastklasse ergibt sich eine neue Zustandsverlaufskurve und damit eine neue Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix der Markov-Kette. Über lange Betrachtungszeiträume ist die Verkehrsbelastung meist nicht konstant, eine Prognose aber immer gewissen Unsicherheiten unterworfen. Daher wird die Entwicklung der Verkehrsbelastung selbst in einer Markov-Kette abgebildet, in der die Wahrscheinlichkeit einer Änderung der Verkehrslastklasse betrachtet wird.

#### Berücksichtigung der Umwelteinflüsse

Für die Berücksichtigung der Umwelteinflüsse wurde in der Schweiz die Höhenlage der betrachteten Straße gewählt, da diese bei der vorliegenden Topographie entscheidenden Einfluss auf die klimatischen Verhältnisse hat. In anderen Ländern können hier andere Parameter sinnvoll sein.

#### Veränderungen der Parameter der Zustandsentwicklung

Die Verhaltensklasse sowie die Verkehrsbelastung stellen variable Parameter dar. Damit kann sich ihr Einfluss auf die Zustandsentwicklung über den Betrachtungszeitraum ändern. Dagegen ist die Höhenlage und damit die Umwelteinflüsse (abgesehen von sehr langfristigen klimatischen Veränderungen) konstant und muss daher in der Simulation nicht weiter betrachtet werden.

Die beiden variablen Parameter werden zeitlich veränderlich angenommen und ihr Verlauf in separaten Markov-Ketten abgebildet. Die Verhaltensklasse kann sich zusätzlich im Rahmen von Erhaltungsmaßnahmen verändern. Damit werden die Verhaltensklasse und die Verkehrsbelastung selbst zu Markov-Variablen in einer dann mehrdimensionalen Markov-Kette. Mit Hilfe einer mehrdimensionalen Markov-Kette lässt sich die Entwicklung des Straßenzustands sowie der Parameter Verhaltensklasse und Verkehrsbelastung wie folgt darstellen:

Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand  $Ix_{k+1} = \alpha_{k+1}$  erreicht wird:

$$P(Ix_{k+1} = \alpha_{k+1} | Ix_k = \alpha_k, V_k = \beta_k, VBel = \gamma_k, H)$$

Wahrscheinlichkeit, dass die Verhaltensklasse  $V_{k+1} = \beta_{k+1}$  erreicht wird:

$$P(V_{k+1} = \beta_{k+1} | V_k = \beta_k)$$

Wahrscheinlichkeit, dass die Verkehrslastklasse  $VBel_{k+1} = \gamma_{k+1}$  erreicht wird:

$$P(VBel_{k+1} = \gamma_{k+1} | VBel_k = \gamma_k)$$

- mit:  $Ix_k =$  Zustandindex  $Ix$  im Entscheidungsschritt  $k$  ( $Ix_k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ )
- $\alpha_k =$  Ausprägung des Zustandindex  $Ix$  im Entscheidungsschritt  $k$
- $V_k =$  Verhaltensklasse im Entscheidungsschritt  $k$  ( $V_k \in \{1,2,3,4\}$ )
- $\beta_k =$  Ausprägung der Verhaltensklasse im Entscheidungsschritt  $k$
- $VBel_k =$  Verkehrsbelastung im Entscheidungsschritt  $k$  ( $VBel_k \in \{T1,T2,T3,T4,T5,T6\}$ )
- $\gamma_k =$  Ausprägung der Verkehrslastklasse im Entscheidungsschritt  $k$
- $H =$  Höhenlage der Straße (konstanter Parameter)

Die Übergangswahrscheinlichkeiten für den Straßenzustand sind abhängig von der jeweiligen Ausprägung der Verhaltensklasse  $V$ , der Verkehrslastklasse  $VBel$  und der Höhenlage  $H$ . Für jede mögliche Kombination der Ausprägungen von  $V$ ,  $VBel$  und  $H$  wird eine Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix  $\mathbf{P}_{V,VBel,H}^{Ix}$  zur Abbildung des zu erwartenden Zustandsverlaufs definiert.

$$\mathbf{P}_{V,VBel,H}^{Ix} = (p_{V,VBel,H,ij}^{Ix}) \quad i, j = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- mit:  $\mathbf{P}_{V,VBel,H}^{Ix} =$  Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix für den Zustandindex  $Ix$  bei der Verhaltensklasse  $V$ , der Verkehrslastklasse  $VBel$  und der Höhenlage  $H$
- $p_{V,VBel,H,ij}^{Ix} =$  Übergangswahrscheinlichkeit im Zustandindex  $Ix$  für den Übergang des Zustands von der Ausprägung  $i$  zur Ausprägung  $j$  bei der Verhaltensklasse  $V$ , der Verkehrslastklasse  $VBel$  und der Höhenlage  $H$

Zusätzlich werden für die Verhaltensklasse  $V$  und die Verkehrslastklasse  $VBel$  weitere Übergangswahrscheinlichkeitsmatrizen, die die Entwicklung dieser Eingangsparameter abbilden, definiert:

$$\mathbf{P}^V = (p_{ij}^V), \mathbf{P}^{VBel} = (p_{ij}^{VBel})$$

- mit:  $\mathbf{P}^V =$  Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix für die Verhaltensklasse  $V$
- $p_{ij}^V =$  Übergangswahrscheinlichkeit der Verhaltensklasse  $V$  für den Übergang von der Ausprägung  $i$  zur Ausprägung  $j$  ( $i, j \in \{1,2,3,4\}$ )
- $\mathbf{P}^{VBel} =$  Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix für die Verkehrslastklasse  $VBel$
- $p_{ij}^{VBel} =$  Übergangswahrscheinlichkeit der Verkehrslastklasse  $VBel$  für den Übergang von der Ausprägung  $i$  zur Ausprägung  $j$  ( $i, j \in \{1,2,3,4,5,6\}$ )

In jedem Schritt der Markov-Kette wird zunächst die Entwicklung der Verhaltensklasse und der Verkehrslastklasse ermittelt. In Abhängigkeit der ermittelten Parameterausprägungen wird dann die Entwicklung des Straßenzustands bestimmt.

### Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix des Zustandsverlaufs aus den zugrundeliegenden Zustandsverhaltenskurven

Für die Abbildung des Straßenzustandsverlaufs in Markov-Ketten müssen die aus retrospektiven Zustandsaufnahmen gewonnenen stetigen Verlaufskurven in diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen über feste Zeitintervalle umgewandelt werden. Im Rahmen der Optimierung mit dem Dynamischen Programmieren wird der Zustandsverlauf in festen Zeitintervallen der Länge  $t^*$  betrachtet. In den jeweiligen Betrachtungszeitpunkten kann der Straßenzustand nur Werte in den von der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix vorgegebenen Intervallen annehmen. Bild 3 zeigt die Ableitung der Übergangswahrscheinlichkeiten aus einer vorhandenen Zustandsverlaufskurve mit bekannter Dichteverteilung der möglichen Streubreite für eine vorgegebene Verhaltens- und Verkehrslastklasse. Zwischen den möglichen Zustandsausprägungen wurde ein Intervall von  $Ix^* = 1.0$  gewählt, damit ergeben sich sechs mögliche Zustandsausprägungen  $Ix = \{0,1,2,3,4,5\}$ .

Für die Bestimmung der einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten wird jeweils ein fester Ausgangspunkt  $t_{k,i}$  mit dem Ausgangszustand  $Ix(t_{k,i}) = i$  ( $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ ) auf der Verlaufskurve des Erwartungswerts des Zustandsverlaufs gewählt. Von diesem Ausgangspunkt  $i$  aus werden die Übergangswahrscheinlichkeiten zu den möglichen Zustandsausprägungen  $j$  in dem um  $t^*$  verschobenen Zeitpunkt  $t_{k+1,i}$  ermittelt (Bild 4). Damit werden die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$  einer Zeile  $i$  der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix bestimmt. Für einen gegebenen Ausgangszustand  $Ix_k$  stehen  $n$  mögliche Folgezustände  $Ix_{k+1}$  zur Auswahl. Die Übergangswahrscheinlichkeiten zu diesen Zuständen entsprechen einer Zeile der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix (Matrix 2).

**Matrix 2. Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix von einem Ausgangszustand in mögliche Straßenzustände**

Matrix 2. Transition probability matrix from an initial condition to possible street conditions

	$Ix$	0	1	2	3	4	5	
Ausgangszustand $i$	0	$p_{00}^{Ix}$	$p_{01}^{Ix}$	$p_{02}^{Ix}$	$p_{03}^{Ix}$	$p_{04}^{Ix}$	$p_{05}^{Ix}$	Übergangswahrscheinlichkeiten zu den möglichen Folgezuständen $j$
	1	$p_{10}^{Ix}$	$p_{11}^{Ix}$	$p_{12}^{Ix}$	$p_{13}^{Ix}$	$p_{14}^{Ix}$	$p_{15}^{Ix}$	
	2	$p_{20}^{Ix}$	$p_{21}^{Ix}$	$p_{22}^{Ix}$	$p_{23}^{Ix}$	$p_{24}^{Ix}$	$p_{25}^{Ix}$	
	3	$p_{30}^{Ix}$	$p_{31}^{Ix}$	$p_{32}^{Ix}$	$p_{33}^{Ix}$	$p_{34}^{Ix}$	$p_{35}^{Ix}$	
	4	$p_{40}^{Ix}$	$p_{41}^{Ix}$	$p_{42}^{Ix}$	$p_{43}^{Ix}$	$p_{44}^{Ix}$	$p_{45}^{Ix}$	
	5	$p_{50}^{Ix}$	$p_{51}^{Ix}$	$p_{52}^{Ix}$	$p_{53}^{Ix}$	$p_{45}^{Ix}$	$p_{55}^{Ix}$	

Für jede Zeile der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix gilt:

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}^{Ix} = 1 \quad (100\%)$$

Die einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$  ergeben sich aus dem Integral der Dichtefunktion der Streubreite des Zustandsverlaufs über den der jeweiligen Zustandsausprägung  $j$  zuzuordnenden Bereich  $\left[ j - \frac{Ix^*}{2}; j + \frac{Ix^*}{2} \right]$ :

$$p_{ij} = \int_{j-\frac{Ix^*}{2}}^{j+\frac{Ix^*}{2}} f_{t_{k+1},i}^{\Xi} \left( f^{Ix} (t_{k+1,i}) \right) dIx$$

Mit:  $p_{ij}$  = Übergangswahrscheinlichkeit vom Ausgangszustand  $i$  zum Zielzustand  $j$   
 $Ix^*$  = Intervallabstand der in der Markov-Kette möglichen Zustandsausprägungen  
 $f_{t_{k+1},i}^{\Xi} (Ix)$  = Dichtefunktion der Streubreite des Straßenzustands  $Ix$  zum Zeitpunkt  $t_{k+1,i}$   
 $f^{Ix} (t)$  = Zeitabhängige Funktion des Zustandsverlaufs im Zustandsindex  $Ix$

Auf diese Weise wird von dem gewählten Ausgangszustand  $i$  aus die Übergangswahrscheinlichkeit  $p_{ij}$  zu allen Folgezuständen  $j$  bestimmt. Dies ergibt die Einträge der Zeile  $i$  der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix. Dieses Vorgehen wird für alle Ausgangszustände  $i$  wiederholt und so die gesamte Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix für eine Kombination von Verhaltensklasse  $V$ , Verkehrslastklasse  $V/Bel$  und Höhenlage  $H$  bestimmt. Analog werden alle Kombinationen dieser Parameter betrachtet.

In Bild 4 ist die Ermittlung der Übergangswahrscheinlichkeiten für die beiden ersten Zeilen der Übergangswahrscheinlichkeiten von den Ausgangszuständen  $Ix(t_{k,0}) = 0$  und  $Ix(t_{k,1}) = 1$  dargestellt. Vom Neuzustand  $Ix(t_{k,0}) = 0$  aus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten, dass der Zustand im ersten Intervall konstant bei  $Ix(t_{k+1,0}) = 0$  konstant bleibt zu  $p_{00}^{Ix} = 0.62$  (62%), die Wahrscheinlichkeit einer Verschlechterung auf  $Ix(t_{k+1,0}) = 1$  zu  $p_{01}^{Ix} = 0.38$  (38%). Alle weiteren Folgezustände werden nicht erreicht ( $p_{03}^{Ix} = p_{04}^{Ix} = p_{05}^{Ix} = 0$ ). Vom Ausgangszustand  $Ix(t_{k,1}) = 1$  aus ergeben sich die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{10}^{Ix} = 0.00$ ,  $p_{11}^{Ix} = 0.18$ ,  $p_{12}^{Ix} = 0.76$ ,  $p_{13}^{Ix} = 0.06$ ,  $p_{14}^{Ix} = 0.00$ ,  $p_{15}^{Ix} = 0.00$ . Mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix lassen sich alle möglichen Zustandsverläufe probabilistisch abbilden. Der Indexwert mit der höchsten Übergangswahrscheinlichkeit, ausgehend von einem gegebenen Zustand, entspricht der erwarteten Zustandsentwicklung. Die Höhe dieser Übergangswahrscheinlichkeit sowie die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten über die anderen Indexwerte spiegelt die Streubreite der Verteilung wieder (Bild 4).

### 3.2.3 Abbildung der Auswirkungen von Erhaltungsmaßnahmen mit Hilfe von Markov-Ketten

Die Zustandsverbesserung  $\Delta Ix^{m_i^x}$ , die mit einer Erhaltungsmaßnahme  $m_i^x$  erzielt wird, ist aufgrund Unsicherheiten bezüglich des tatsächlichen strukturellen Aufbaus und Schwankungen der Ausführungsqualität nicht immer exakt vorhersagbar. Analog zur Abbildung der Zustandsverschlechterung kann auch die Zustandsverbesserung mithilfe von Markov-Ketten abgebildet werden. Dazu wird für jede zur Auswahl stehende Erhaltungsmaßnahme  $m_i^x$  eine Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix  $\mathbf{P}^{m_i^x, Ix}$  definiert, die die Wahrscheinlichkeiten angibt, mit der die möglichen Zielzustände in Abhängigkeit vom Ausgangszustand erreicht werden. Aufgrund eventueller Einschränkungen bezüglich des Anwendungsbereichs sowie der offensichtlichen Vorgabe, dass nur Zustandsverbesserungen erzielt werden, sind diese Übergangswahrscheinlichkeitsmatrizen nicht immer voll besetzt (Matrix 3).

Matrix 3. Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix der zur Auswahl stehenden Erhaltungsmaßnahmen  
 Matrix 3. Transition probability matrix of the available maintenance measures

		$Ix$	0	1	2	3	4	5
Anwendungsbereich der Maßnahme	0	$p_{00}^{m_i^x, Ix}$	-	-	-	-	-	-
	1	$p_{10}^{m_i^x, Ix}$	$p_{11}^{m_i^x, Ix}$	-	-	-	-	-
	2	$p_{20}^{m_i^x, Ix}$	$p_{21}^{m_i^x, Ix}$	$p_{22}^{m_i^x, Ix}$	-	-	-	-
	3	$p_{30}^{m_i^x, Ix}$	$p_{31}^{m_i^x, Ix}$	$p_{32}^{m_i^x, Ix}$	$p_{33}^{m_i^x, Ix}$	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-

Übergangswahrscheinlichkeiten zu den möglichen Folgezuständen  $j$

mit:  $\mathbf{P}^{m_i^x, Ix}$  = Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix im Zustandsindex  $Ix$  für die Erhaltungsmaßnahme  $m_i^x$   
 $p_{ij}^{m_i^x, Ix}$  = Übergangswahrscheinlichkeit von Ausgangswert  $i$  zum Zielwert  $j$  im Zustandsindex  $Ix$  für die Erhaltungsmaßnahme  $m_i^x$

Jede Zeile der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix ist einem Ausgangszustand  $Ix = i$  zugeordnet. Für einen gegebenen Ausgangszustand  $Ix = i$  gibt die entsprechende Zeile  $i$  die Übergangswahrscheinlichkeiten zu den Zielzuständen  $j$  an. Für den Ausgangszustand  $Ix = 2$  gibt  $p_{20}^{m_i^x, Ix}$  die Wahrscheinlichkeit an, dass nach der Maßnahme der Neuzustand  $Ix = 0$  erreicht wird.  $p_{21}^{m_i^x, Ix}$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass nach der Maßnahme der Zustand  $Ix = 1$  erreicht wird und  $p_{22}^{m_i^x, Ix}$  die Wahrscheinlichkeit, dass keine Verbesserung erzielt wird. Da eine Zustandsverschlechterung durch eine Erhaltungsmaßnahme keinen Sinn macht, bleiben die übrigen Einträge der Zeile  $i = 2$  leer.

### 3.2.4 Simulation des Zustandsverlaufs

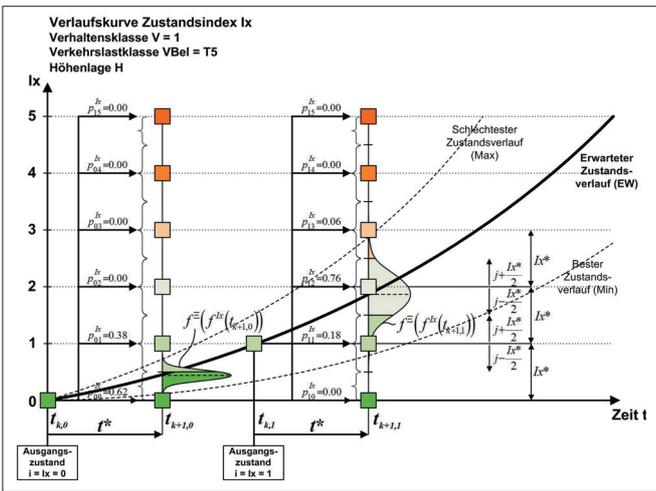
In jedem Entscheidungsschritt des dynamischen Entscheidungsmodells muss der Zustandsverlauf bis zum nächsten Entscheidungszeitpunkt ermittelt werden. Zum betrachteten Zeitpunkt ist ein Ausgangszustand  $Ix_k$  des Straßenzustands gegeben. Gesucht ist der Folgezustand  $Ix_{k+1}$ . Je nachdem, ob eine Erhaltungsmaßnahme gewählt wird, oder nicht, wird der Folgezustand mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix für die Zustandsverschlechterung infolge äußerer Einwirkungen  $\mathbf{P}^{Ix}$  oder der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix  $\mathbf{P}^{m_i^x, Ix}$  der entsprechenden Maßnahme  $m_i^x$  bestimmt.

Für einen gegebenen Ausgangszustand  $Ix_k$  stehen  $n$  mögliche Folgezustände  $Ix_{k+1}$  zur Auswahl. Die Übergangswahrscheinlichkeiten zu diesen Zuständen entsprechen einer Zeile der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix.

Entsprechend der einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}^{Ix}$  lassen sich den einzelnen Zielzuständen  $Ix_{k+1} = \alpha_i$  Teilintervalle  $T_i$  des Intervalls  $[0,1]$  wie folgt zuordnen:

1. Zielzustand  $\alpha_1$ :  $T_1 = [0, p_{i,1}^{Ix}]$
2. Zielzustand  $\alpha_2$ :  $T_2 = [p_{i,1}^{Ix}, p_{i,1}^{Ix} + p_{i,2}^{Ix}]$
3. Zielzustand  $\alpha_3$ :  $T_3 = [p_{i,1}^{Ix} + p_{i,2}^{Ix}, p_{i,1}^{Ix} + p_{i,2}^{Ix} + p_{i,3}^{Ix}]$
- ...
- n. Zielzustand  $\alpha_n$ :  $T_n = [p_{i,1}^{Ix}, p_{i,2}^{Ix} \dots + p_{i,n-1}^{Ix}, 1]$

Die Auswahl des Zielzustands  $Ix_{k+1} = \alpha_i$  im jeweiligen Entscheidungsschritt eines Szenarios der probabilistischen Simulation erfolgt wie bei der Monte-Carlo-Simulation mithilfe einer Zufallszahl  $Z \in [0,1]$ . In jedem Entscheidungsschritt eines Szenarios wird eine Zufallszahl  $Z \in [0,1]$  ermittelt. Als Zielzustand  $Ix_{k+1} = \alpha_i$  wird der Zustandswert gewählt, in dessen zugeordnetes Teilintervall  $T_i$  die Zufallszahl  $Z$  fällt (Bild 5).



**Bild 4. Ermittlung der Übergangswahrscheinlichkeiten einer Markov-Kette aus der Verlaufskurve des Strassenzustands und der zugeordneten Dichtefunktion der Streubreite**  
 Fig. 4. Determination of the transition probabilities of a Markov chain based on the progress of the street condition curve and the assigned density function of scatter range

Für die Auswahl des Zielzustands gilt:

$$I_{x_{k+1}} = \{ \alpha_i | Z \in Z_i \}$$

In Bild 5 ist die probabilistische Ermittlung des Zielzustands  $I_x = j$  für den Ausgangszustand  $I_x = 1$  dargestellt. Jedem möglichen Zielzustand  $I_x = j$  wird ein Teilintervall  $T_j$  des Intervalls  $[0;1]$  zugeordnet. Die ermittelte Zufallszahl  $Z = 0.43$  liegt im Teilintervall  $T_3$ , damit ergibt sich in der probabilistischen Simulation der Zielzustand  $I_x = 3$ . Die zufallsbasierte Auswahl des Zielzustands wird in jedem Entscheidungsschritt durchgeführt und damit ein möglicher Zustandsverlauf über den Betrachtungszeitraum simuliert. Da direkt der Zielzustand bestimmt wird (nicht die Zustandsänderung), kann die Berechnung des neuen Zustands mit Hilfe der Zustandstransformationsgleichung in der dynamischen Optimierung entfallen.

### 3.3 Monte-Carlo-Simulation

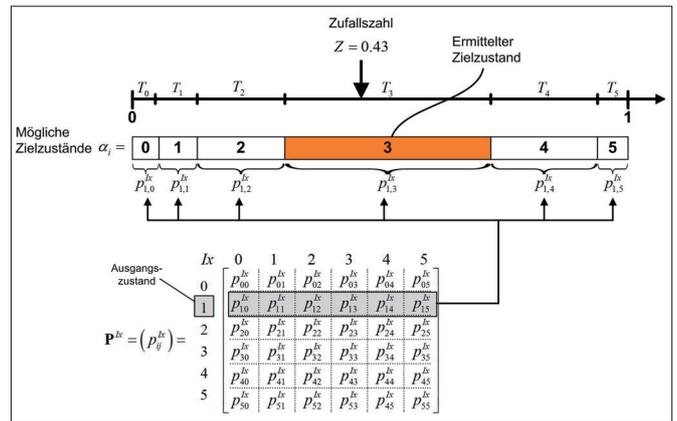
Die Monte-Carlo-Simulation [6] wird bei der probabilistischen Optimierung des Straßenunterhalts zur Abbildung aller Unsicherheitsbehafteter Kostenanteile herangezogen. Um die Unsicherheiten bezüglich der Ausprägungen der Eingangsparameter abbilden zu können, wird für jeden Eingangsparameter nicht nur ein erwarteter Wert der Ausprägung, sondern eine Dichtefunktion zwischen

- Minimalwert,
- Erwartungswert und
- Maximalwert

in die Berechnung integriert.

Im Folgenden wird zunächst auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Eingangsparameter und dann auf die Simulation der Ergebnisse eingegangen. Die Simulation kann mit dem Monte-Carlo-Sampling Verfahren oder dem Latin Hypercube Sampling Verfahren erfolgen. Die detaillierte Funktionsweise der Monte-Carlo-Simulation und des Latin Hypercube Sampling Verfahrens [7] kann für praktische Anwendungen bei Girmscheid und Busch [11] nachgelesen werden.

Die Verteilung der möglichen Ausprägungen der einzelnen Parameter wird zwischen Minimal- und Maximalwert in



**Bild 5. Ermittlung des Zielzustands  $I_{x_{k+1}} = \alpha_i$  mithilfe einer Zufallszahl  $Z \in [0;1]$  unter Berücksichtigung der Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}^k$**   
 Fig. 5. Determination of the target condition  $I_{x_{k+1}} = \alpha_i$  using a random number  $Z \in [0;1]$ , taking the transition probabilities into consideration  $p_{ij}^k$

einer Dichtefunktion  $f(K_i)$  bzw. Verteilungsfunktion  $F(K_i)$  beschrieben. Dies kann mit Hilfe einer Dreiecksverteilung, einer Gauss-Verteilung oder auch (wie in Bild 6 dargestellt) mit einer Beta-Pert-Verteilung erfolgen. Die Beta-Pert-Verteilung hat den Vorteil, dass sie über zwei Funktionsparameter  $p$  und  $q$  an die jeweils erwartete Verteilung angepasst werden kann.

Die Auswahl einer konkreten Parameterausprägung in einem Szenario erfolgt analog zu den Markov-Ketten mithilfe einer Zufallszahl  $Z^{K_i} \in [0,1]$  bestimmt. Dabei wird die Zufallszahl  $Z^{K_i}$  einer Ausprägung der Verteilungsfunktion zugeordnet und daraus die entsprechende Parameterausprägung  $K_i$  bestimmt (Bild 6):

$$Z^{K_i} = F(K_i) \Rightarrow K_i = G(F(K_i)) = G(Z^{K_i}) \text{ mit } Z^{K_i} \in [0;1]$$

mit:  $Z^{K_i}$  = Zufallszahl zwischen 0 und 1  
 $F(K_i)$  = Verteilungsfunktion des Kostenanteils  $K_i$   
 $G(F(K_i))$  = Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion  $F(K_i)$

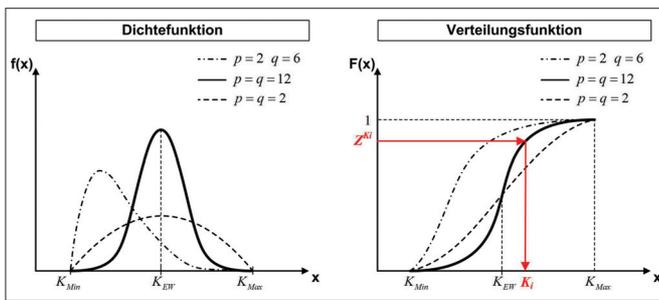
Auf diese Weise werden in jedem Schritt des Entscheidungspfades die Ausprägungen sämtlicher betrachteter Kostenanteile des Betreibers, der Nutzer und Dritter für jede Entscheidungsoption probabilistisch in die Simulation integriert (Bild 7).

### 3.4 Ablauf der probabilistischen Optimierung

Die probabilistische Simulation der Optimierung ergibt sich aus der Kombination einzelner Szenarien  $v$ , von denen jedes eine mögliche Ausprägung und Entwicklung der Eingangsparameter abbildet. Für jedes Szenario  $v$  wird eine optimale Maßnahmenabfolge und die daraus resultierenden Kosten berechnet.

Die Optimierung eines Szenarios  $v$  erfolgt prinzipiell analog zu der bereits beschriebenen deterministischen Betrachtung [1]. Allerdings muss die Ausprägung jedes probabilistisch betrachteten Parameters der Optimierung zuvor mit Hilfe einer Zufallszahl  $Z$  aus der Dichte- und Verteilungsfunktion bzw. aus der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix bestimmt werden.

Im Einzelnen erfolgt die Berechnung für ein Szenario  $v$  mit Vorwärtsrekursion und a priori Bestimmung der Parameterausprägung wie folgt (die anderen Fälle lassen sich analog von diesem Vorgehen ableiten):



**Bild 6.** Dichte- und Verteilungsfunktionen der Beta-Dichte-Verteilung in Abhängigkeit der Funktionsparameter  $p$  und  $q$   
 Fig. 6. Density and distribution functions of the Beta density distribution in dependency on function parameters  $p$  and  $q$

**Initialisierung:**

Anfangszustand:  $Ix_0^y$   
 Zielfunktionswert:  $J_0^y(Ix_0^y) := 0$

**Rekursion:**

Die Rekursion erfolgt in konstanten Zeitintervallen  $t^* = t_{k+1} - t_k$ . In jedem Rekursionsschritt wird ausgehend von den möglichen Zustandsausprägungen im Ausgangszeitpunkt  $t_k$  der jeweils optimale Weg zu jeder einzelnen möglichen Zustandsausprägung im Zielzeitpunkt  $t_{k+1}$  gesucht. Die Betrachtung erfolgt also jeweils vom Zielzeitpunkt aus rückwärtsgerichtet zum Ausgangszeitpunkt.

Da die Simulation der Zustandsänderungen auf der Basis von Markov-Ketten jeweils in Abhängigkeit vom Ausgangszustand erfolgt, müssen jedoch in einem ersten Schritt zunächst die Ausprägungen der Zustandsänderungen von jedem möglichen Ausgangszustand  $Ix_k^y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  aus simuliert werden. Für jeden Ausgangszustand  $Ix_k^y$  erfolgt die Simulation wie folgt (Bild 8):

• **Simulation des Zustandsverlaufs ohne Erhaltungsmaßnahme (Bild 8):**

Zunächst wird die Zustandsverschlechterung infolge der Verkehrsbelastung und äußerer Einflüsse bestimmt (Störvektor). Hierfür wird mithilfe einer Zufallszahl  $Z^{Ix}$  aus der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix  $P_{V,VBel,H}^{Ix}$  des Zustandsverlaufs für jeden der möglichen Ausgangszustand  $Ix_k^y$  ein darauf folgender Zielzustand  $Ix_{k+1}^y$  bestimmt (vereinfachend wird hier zunächst von konstanter Verhaltens- und Verkehrsbelastung ausgegangen):

$$Ix_{k+1}^y(Z^{Ix}) = \left\{ \alpha_i \mid Z^{Ix} \in T_i \right\}$$

Mit:  $Z^{Ix} \in [0;1], \sum_{i=1}^n T_i = [0;1]$

$$T_i \Big|_{i=1}^n = f(P_{V,VBel,H}^{Ix}) = \left[ \sum_{j=1}^{i-1} P_{V,VBel,H,Ix_k,j}^{Ix}; \sum_{j=1}^i P_{V,VBel,H,Ix_k,j}^{Ix} \right]$$

- $Z^{Ix}$  = Zufallszahl zur Ermittlung des Zielzustands  $Ix_{k+1}^y$
- $\alpha_i$  = Ausprägung des Zielzustands  $Ix_{k+1}^y$   
( $\alpha_i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ )
- $T_i$  = Der Ausprägung  $\alpha_i$  zugeordnetes Teilintervall von  $[0;1]$

$P_{V,VBel,H}^{Ix}$  = Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix  
 $P_{V,VBel,H,Ix_k,j}^{Ix}$  = Übergangswahrscheinlichkeit des Zustandsverlaufs vom Ausgangszustand  $Ix_k$  zum Zielzustandsausprägung  $j$  in Abhängigkeit der Verhaltensklasse  $V$ , der Verkehrsbelastung  $VBel$  und der Höhenlage  $H$

• **Simulation der Wirkung der zur Auswahl stehenden Maßnahmen (Bild 8):**

Im nächsten Schritt werden die möglichen Zustandsverbesserungen infolge der zur Auswahl stehenden Erhaltungsmaßnahmen  $m_i^x$  bestimmt. Hierfür wird für jede der Erhaltungsmaßnahmen  $m_i^x$  mithilfe einer Zufallszahl  $Z^{m_i^x}$  aus der entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix  $P^{m_i^x}$  in Abhängigkeit vom Ausgangszustand  $Ix_k^y$  der mögliche Zielzustand  $Ix_{k+1}^y$  nach der Maßnahme ermittelt:

$$Ix_{k+1}^{m_i^x,v}(Z^{m_i^x}) = \left\{ \alpha_i \mid I^{m_i^x} \in T_i^{m_i^x} \right\}$$

Mit:  $Z^{m_i^x} \in [0;1], \sum_{i=1}^n T_i^{m_i^x} = [0;1]$ ,

$$T_i^{m_i^x} \Big|_{i=1}^n = f(P^{m_i^x}) = \left[ \sum_{j=1}^{i-1} P_{Ix_k,j}^{m_i^x}; \sum_{j=1}^i P_{Ix_k,j}^{m_i^x} \right]$$

Neben der Zustandsveränderung ist auch eine mögliche Änderung der Verhaltensklasse  $V$ , die die weitere Zustandsentwicklung beeinflusst, zu beachten.

• **Simulation der Maßnahmenkosten (Bild 8):**

Die Ausprägungen Maßnahmenkosten werden mit der Monte-Carlo Simulation ermittelt [8], [11]. Dafür wird die Ausprägung der Kosten  $K^{m_i^x,v}$  der zur Auswahl stehenden Erhaltungsmaßnahmen  $m_i^x$  mithilfe von Zufallszahlen  $Z^{K_i^{m_i^x}}$  aus den zuvor definierten Dichte- und Verteilungsfunktionen dieser Kostenanteile bestimmt (vgl. [4], [12]).

$$Z^{K^{m_i^x}} = F(K^{m_i^x,v}) \Rightarrow K^{m_i^x,v} = G(F(K^{m_i^x,v})) = G(Z^{K^{m_i^x}})$$

mit  $Z^{K^{m_i^x}} \in [0;1]$

- mit:  $Z^{K^{m_i^x}}$  = Zufallszahl zwischen 0 und 1
- $F(K^{m_i^x,v})$  = Verteilungsfunktion der Kosten der Erhaltungsmaßnahme  $m_i^x$
- $G(F(K^{m_i^x,v}))$  = Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion  $F(K^{m_i^x,v})$

• **Simulation der Nutzerkosten und der Kosten Dritter (Bild 8):**

Die einzelnen Kostenanteile  $K_i^{N/D,v}$  der Nutzerkosten und Kosten Dritter werden analog zur Simulation der Maßnahmenkosten in einer Monte-Carlo-Simulation mithilfe von Zufallszahlen  $Z^{K_i^{N/D}}$  aus den zuvor definierten Dichte- und Verteilungsfunktionen dieser Kostenanteile bestimmt (vgl. [4], [12]).

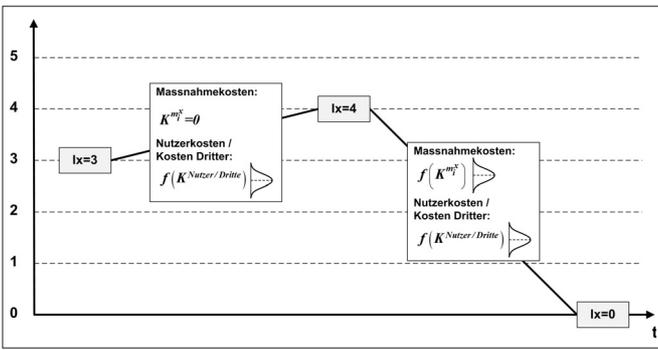


Bild 7. Simulation der Maßnahmenkosten, Nutzerkosten und Kosten Dritter in jedem Entscheidungsschritt  
 Fig. 7. Simulation of the costs of the measures, the costs for users, and the third-party costs at each step of the decision-making process

$$Z^{K_i^{N/D}} = F(K_i^{N/D,v}) \Rightarrow K_i^{N/D,v} = G(F(K_i^{N/D,v})) = G(Z^{K_i^{N/D}})$$

mit  $Z^{K_i^{N/D}} \in [0;1]$

mit:  $Z^{K_i^{N/D}} =$  Zufallszahl zwischen 0 und 1  
 $F(K_i^{N/D,v}) =$  Verteilungsfunktion der Nutzerkosten bzw. Kosten Dritter  $K_i^{N/D,v}$   
 $G(F(K_i^{N/D,v})) =$  Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion  $F(K_i^{N/D,v})$

Auf der Basis der so bestimmten Zustandsänderungen und Kostenausprägungen kann der Gesamtkostenbarwert der verschiedenen möglichen Pfade zu den Zustandsausprägungen im Entscheidungsschritt  $k + 1$  berechnet werden. Hierfür werden die probabilistisch ermittelten Ausprägungen der Zustandsverschlechterung (Störvektor), die sich aus den gewählten Maßnahmen ergebenden Zustandsverbesserungen (Entscheidungsvektor) sowie die Kosten aller Stakeholder herangezogen:

$$KBW_{t_B}^v = \sum_{t=l_k}^{t_{k+1}} \left( \frac{K_t^{B,v}(I_{x_k}, x_k)}{(1+q^B)^{(t-l_B)}} + \frac{K_t^{N,v}(I_{x_k}, x_k)}{(1+q^N)^{(t-l_B)}} + \frac{K_t^{D,v}(I_{x_k}, x_k)}{(1+q^D)^{(t-l_B)}} \right) + KBW_{t_B}^v$$

**Entscheidungsfindung**

Im Gegensatz zur Simulation der Zustandsentwicklung in den Markov-Ketten, die vom jeweiligen Ausgangszustand ausgeht, erfolgt die Optimierung mit Hilfe des dynamischen Programmierens jeweils mit Fokus auf den zu erreichenden Zielzustand. Die Entscheidungsfindung im Entscheidungsschritt  $k + 1$  erfolgt auf Basis der zuvor simulierten Zustandsänderungen und Kostenausprägungen rückwärtsgerichtet von den möglichen Zielzuständen aus (Bild 9). Für jeden Zielzustand  $I_{x_{k+1}}$  wird der optimale Pfad (kostenminimale) dorthin gesucht. Dabei kann auf die Ergebnisse des vorherigen Entscheidungsschritts  $k$  zurückgegriffen werden. Die Entscheidungsfindung erfolgt unter Berücksichtigung der für den Entscheidungsschritt simulierten Kosten  $KBW^v(I_{x_k}^v, x_k^v)$  sowie der Summe der in den vorherigen Schritten angefallenen Kosten  $J_{k-1}^v(I_i^v, x_i^v)_{i=0}^{k-1}$  zur Erreichung des jeweiligen Ausgangszustands.

Die Auswahl des optimalen Pfads erfolgt auf Basis der Zielfunktion des Entscheidungsmodells:

$$J_k^v(I_{x_k}^v) := \min_{x_k \in X_k(I_{x_k})} \left( KBW^v(I_{x_k}^v, x_k^v) + J_{k-1}^v(I_{x_k}^v, x_k^v) \right)$$

Mit:  $J_k^v(I_{x_k}^v) =$  Zielfunktion der Optimierung in Abhängigkeit von der Ausprägung des Straßenzustands im Szenario  $v$   
 $KBW^v(I_{x_k}^v, x_k^v) =$  Kosten-Barwert im Rekursionsschritt  $k$  in Abhängigkeit von der Ausprägung des Straßenzustands  $I_{x_k}^v$  und dem Entscheidungsvektor  $x_k^v$   
 $J_i^v(I_{x_i}^v, x_i^v) =$  Funktion der Kosten-Barwerte der vorangegangenen Rekursionsschritte

Die so ausgewählten optimalen Pfade zu den einzelnen möglichen Zustandsausprägungen im folgenden Entscheidungsschritt  $k + 1$  bilden die Grundlage für den nächsten Rekursionsschritt.

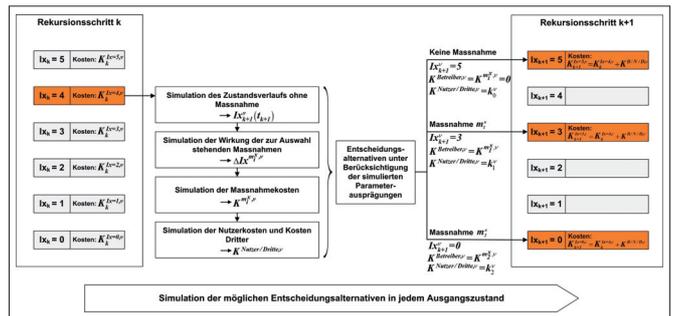


Bild 8. Ermittlung der Handlungsalternativen und Simulation der sich daraus ergebenden Zustandsänderungen und Kostenausprägungen für jeden möglichen Ausgangszustand (hier  $I_{x_k} = 4$ )

Fig. 8. Identification of alternative choices of action and simulation of the resulting changes in condition and cost characteristics for each possible starting condition (in this case:  $I_{x_k} = 4$ )

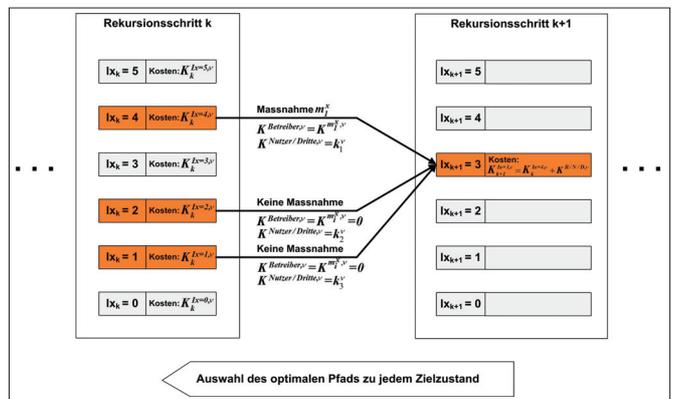


Bild 9. Auswahl des optimalen Pfads zu jedem Zielzustand (hier  $I_{x_{k+1}} = 3$ ) auf der Basis der zuvor probabilistisch ermittelten Entscheidungsoptionen

Fig. 9. Selection of the optimum path for achieving each target condition (in this case:  $I_{x_{k+1}} = 3$ ), based on the prior probabilistic determination of the decision options

Auf diese Weise wird für jedes Szenario  $v$  eine optimale Lösung unter Berücksichtigung der zufälligen Ausprägungen der Eingangsparameter ermittelt. Die Gesamtheit der optimalen Lösungen stellt die in der Realität zu erwartende Streuung der möglichen Ergebnisse dar.

**3.5 Auswertung der probabilistischen Optimierung**

Die probabilistische Simulation beeinflusst nicht nur die Kosten der verschiedenen Varianten, sondern auch die Auswahl der Erhaltungsmaßnahmen und damit die Variantenbildung selbst. Das Ergebnis der Simulation ist also

nicht nur eine Verteilung der Kosten einer optimalen Erhaltungsvariante, sondern es können, je nach Ausprägung der einzelnen Parameter, verschiedene Varianten optimal werden. Bei der Auswertung der Ergebnisse müssen also alle Parameter separat betrachtet werden. Dies gilt für die Auswahl der Maßnahmen, die Zeitpunkte der Maßnahmen sowie die daraus resultierenden Kosten. Die Auswertung kann auf zwei Arten erfolgen:

- Betrachtung kompletter Erhaltungsvarianten:  
Aus der Gesamtheit der Ergebnisse werden die Szenarien mit gleichen Maßnahmenabfolgen selektiert, die Wahrscheinlichkeit, dass diese Variante optimal wird, berechnet und der Erwartungswert sowie die Verteilung der daraus resultierenden Kosten bestimmt.
- Betrachtung der einzelnen Entscheidungsschritte:  
In jedem Entscheidungsschritt der rekursiven Entscheidungsfindung wird betrachtet, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Ausführung einzelner Maßnahmen zu diesem Zeitpunkt zu einem optimalen Gesamtergebnis führt. Unabhängig von den Einzelentscheidungen wird die Gesamtverteilung der Kosten über den gesamten Betrachtungszeitraum ausgewertet.

Je nach Anwendungsfall sind beide Varianten der Auswertung sinnvoll anwendbar. Die Betrachtung ganzer Erhaltungsvarianten über den kompletten Betrachtungszeitraum stellt eine holistische Betrachtung, die sich für die langfristige Planung des Erhaltungsmanagements eignet, dar. Für eine Budgetplanung in den einzelnen Jahren macht es Sinn, einzelne Entscheidungsschritte und damit die Wahrscheinlichkeit, mit der in den einzelnen Jahren ein bestimmtes Budget benötigt wird, zu betrachten.

#### 4 Fazit

Das LC-Erhaltungsoptimierungsmodell stellt den dritten Teil des holistischen LC-Erhaltungsmanagementmodells dar, in dem die Ergebnisse der beiden anderen Teilmodelle zusammengeführt und zu einer Optimierung des Erhaltungsmanagements erweitert werden. Dem Entscheidungsträger im Straßenunterhalt wird mit dem Gesamtmodell ein Tool zur Definition, Bewertung und Optimierung von Erhaltungsstrategien und darauf aufbauenden Erhaltungsvarianten bereitgestellt. Mit der hier vorgestellten probabilistischen Simulation der Erhaltungsoptimierung wird es zusätzlich möglich, sämtliche Unsicherheiten bezüglich der Prognosen von Zustands- und Kostenwerten in die Betrachtung einzubeziehen und so zu einer fundierteren Entscheidungsfindung zu kommen. Die Kombination von Markov-Ketten und Monte-Carlo Simulation schafft die Möglichkeit alle unsicherheitsbehafteten Parameter in einer probabilistischen Simulation zu berücksichtigen. Damit wird das LC-Erhaltungsoptimierungsmodell um eine für die praktische Anwendung entscheidende Komponente erweitert.

## Literatur

- [1] *Fastrich, A. und G. Girmscheid*: Optimierungsmodell – Deterministische, lebenszyklusorientierte, dynamische Optimierung der Straßenunterhaltsmaßnahmen. *Bauingenieur*, 2010 (09/2010): p. 385–392.
- [2] *Girmscheid, G. und A. Fastrich*: Massnahmenplanung im Erhaltungsmanagement von Fahrbahnen – Zusatzkosten infolge Vor- oder Aufschub von Erhaltungsmaßnahmen. 2010: Departement für Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation UVEK, Bundesamt für Strassen.
- [3] *Girmscheid, G.*: Entscheidungsmodell – Lebenszyklusorientierte Strategiebildung und Unterhaltsvarianten für Strassennetze. *Bauingenieur*, 2007. 82(7/8): p. 346–355.
- [4] *Girmscheid, G.*: Entscheidungsmodell – Lebenszyklusorientierte Wirtschaftlichkeitsanalyse von Unterhaltsstrategien für Strassennetze. *Bauingenieur*, 2007. 82(7/8): p. 356–366.
- [5] *Schneeweiss, C.*: Dynamisches Programmieren. 1974, Würzburg Wien: Physica-Verlag. 226.
- [6] *Girmscheid, G.*: Risikomanagement-Prozess-Modell für Bauunternehmen – Risikobelastungsdimension. *Bauingenieur*, 2007. 82(2): p. 53–61.
- [7] *Girmscheid, G.*: Risikomanagement-Prozess-Modell für Bauunternehmen – Risikotragfähigkeits- und Risikoprozesssteuerungsdimensionen. *Bauingenieur*, 2007. 82(2): p. 62–70.
- [8] *Girmscheid, G.*: Risikobasiertes probabilistisches LC-NPV-Modell – Bewertung alternativer baulicher Lösungen. *Bauingenieur*, 2006. 81 (09/2006): p. 394–405.
- [9] *Gnehm, V.*: Massnahmenplanung im Erhaltungsmanagement von Fahrbahnen – Standardisierte Erhaltungsmaßnahmen. 2008, Departement für Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation UVEK, Bundesamt für Strassen.
- [10] SN 640324a, Dimensionierung Oberbau. 1997, Vereinigung Schweizerischer Strassenfachleute.
- [11] *Girmscheid, G. und T.A. Busch*: Projektstrisikomanagement in der Bauwirtschaft. 2008, Berlin: Bauwerk Verlag.
- [12] *Fastrich, A. and G. Girmscheid*: NPV – Decision making model for street maintenance and rehabilitation in ISEC 04, M. Xie and I. Patnaikuni, Editors. 2007, Taylor and Francis publishers: Melbourne, Australia.